# 1 Основные понятия сетевого планирования и управления

Методы сетевого планирования и управления представляют собой один из разделов теории управления большими системами и предназначены для управления производственно-экономическими, социотехническими системами. Расчет планов, а также реализация функции управления осуществляется с помощью сетевых моделей.

Системы, использующие сетевую модель, называются ***системами сетевого планирования и управления*** (СПУ).

***Сетевая модель*** - процесс выполнения проекта, представленный в виде взаимосвязи работ с указанием их продолжительностей.

***Сетевой график*  -** графическое изображение сетевой модели.

Объекты управления в системах СПУ - коллективы исполнителей, располагающие определенными ресурсами и выполняющие определенный комплекс операций, призванный обеспечить достижение намеченной цели. Например, разработку нового изделия, строительство объекта. Эффективность решения основных задач планирования и управления на основе разработки, анализа и оптимизации сетевых моделей зависит от решения проблем сбора, передачи и хранения информации, использования программных средств для ЭВМ, позволяющих автоматизировать процесс решения основных задач.

Основные понятия сетевой модели: работа, событие, путь (рис 1).

А

2

Б

4

В

6

10

Ж

Г

11

З

15

8

Е

Д

3

1

2

5

6

3

4

7

Рисунок 1

Сетевая модель на рисунке 1 состоит из 7 событий и 8 работ, продолжительность выполнения которых указана под работами.

Понятие ***работа*** может иметь следующие значения:

а) действительная работа - процесс, требующий затрат времени и ресурсов;

б) ожидание - процесс, требующий только затрат времени;

в) фиктивная работа - процесс, не требующий ни времени, ни ресурсов. Она является графическим элементом, позволяющим правильно отразить взаимосвязь между работами.

Действительные работы и ожидания изображаются сплошными стрелками, фиктивные работы - пунктирными. Над стрелками пишутся наименования работ, под стрелками - продолжительность. Каждая работа сетевого графика соединяет между собой два события.

***Событие -*** факт начала или окончания одной или нескольких работ. Событие совершается мгновенно, в определенный момент времени, не потребляя ресурсов. Если событие является результатом нескольких работ, то оно считается свершившимся в момент окончания последней входящей в него работы. Событие изображается кружком и имеет свой номер.

Всякая работа сетевого графика кодируется номерами ее начального (i) и конечного (j) событий. Например, работа А имеет код (1,2), а работа Г - код (4,7).

В сетевой модели имеется начальное событие (с номером 1), из которого работы только выходят, и конечное событие, в которое работы только входят.

***Путь*** - это цепочка следующих друг за другом работ, соединяющих начальное и конечное события. Например, L1 = (1,2,3,4,7), L2 = ( 1,2,5,6,7), L3= (1,2,3,4,6,7).

***Продолжительность пути*** определяется суммой продолжительностей составляющих его работ.

Например, t(L1)=t(1,2)+t(2,3)+t(3,4)+t(4,7)=2+4+6+11=23, t(L2)=28, t(L3)=37.

Путь, имеющий максимальную длину, называют ***критическим*** и обозначают Lкр, а его продолжительность − tкр. Продолжительность критического пути определяет срок выполнения всего проекта. Работы, принадлежащие критическому пути, называются критическими. Их несвоевременное выполнение ведет к срыву всего комплекса работ. На сетевом графике критические работы выделяются жирными линиями.

Число путей в сетевом графике можно определить следующим образом. Исходному событию присваивается число 1, которое записывается над кружком, изображающим событие. На следующих событиях записывается число, равное сумме чисел, стоящих над событиями входящих работ. Количество путей определяет число, стоящее над завершающим событием (рис. 2).

3

2

1

1

1

1

1

7

4

3

6

5

2

1

3

Д

Е

8

15

З

11

Г

Ж

10

6

В

4

Б

2

А

Рисунок 2

При построении сетевого графика рекомендуется направлять стрелки слева направо и изображать их по возможности горизонтальными линиями без лишних пересечений.

**Правила построения сетевого графика**:

1. Если работы А, Б, В выполняются последовательно, то на сетевом графике они изображаются по горизонтали одна за другой (рис. 3).

1

2

3

4

А

Б

В

Рисунок 3

2. Если результат работы А необходим для выполнения работ Б и В, то на сетевом графике это изображается следующим образом (рис. 4).

Рисунок 4



3. Если результат работ А и Б необходим для выполнения работы В, то на сетевом графике это изображается следующим образом (рис. 5).

1

2

3

4

А

Б

В

Рисунок 5

4. Работы сетевого графика не должны иметь одинакового кода (рис. 6). Если работы А1, А2,..., Ап выходят из одного события и их выполнение необходимо для свершения одного и того же события, то вводятся дополнительные фиктивные работы (рис. 7).

1

2

А2

А3

А1

1

2

3

4

А1

А2

А3

Рисунок 6 Рисунок 7

5. Если работы Б, В, Г начинаются после частичного выполнения работы А, то работа А разбивается на части: А1, А2, А3 и т.д., при этом каждая часть работы А в сетевом графике считается самостоятельной работой (рис. 8).

А1

А2

А3

А4

Б

В

Г

1

2

4

6

8

3

5

7

Рисунок 8

6. Если для начала работы В необходимо выполнение работ А и Б, а для начала работы Г− выполнение работы А, то в сетевой график вводится дополнительная фиктивная работа (рис. 9).

1

3

5

6

2

4

А

Г

Б

В

Рисунок 9

7. Если после окончания работы А можно начать работу Б, а после окончания работы В - работу Г и работа Д может быть начата только после окончания работ А и В, то на сетевом графике это изображается при помощи двух дополнительных фиктивных работ (рис.10).

1

3

6

7

2

4

5

8

А

Б

Д

В

Г

Рисунок 10

8. В сетевом графике не должно быть замкнутых контуров.

9. События следует кодировать так, чтобы номер начального события данной работы был меньше номера конечного события.

10. В одноцелевом графике не должно быть “тупиков”, т.е. таких событий, из которых не выходит ни одной работы (рис.11).

1

2

3

5

4

А

Г

Б

В

Д

Рисунок 11

11. В сетевом графике не должно быть “хвостов”, т.е. событий, в которые не входит ни одной работы, если эти события не являются исходными для данного сетевого графика (рис. 12).

1

2

3

5

4

А

Г

Б

В

Д

Рисунок 12

12. При укрупнении сетевых графиков группа работ может изображаться как одна работа, если в этой группе имеется одно конечное событие и работы выполняются одним исполнителем. Продолжительность укрупненной работы равна продолжительности наибольшего пути от начального до конечного события этой группы работ (рис. 13).

1

2

3

4

5

6

7

А

5

Б

2

В

2

Г

5

Д

5

Е

1

Ж

8

З

5

а

б

5

З

13

К(Б,В,Г,Д,Е,Ж)

5

7

6

2

1

а – график до укрупнения; б – график после укрупнения.

Рисунок 13

*Пример* *1*. Построить топологию сетевого графика, представленного в таблице 1, закодировать работы, поставить их продолжительность и определить коэффициент сложности сети.

Таблица 1 – График работ

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Работы, окончание которых является необходимым условием для начала рассматриваемой | Рассмат­риваемая  работа | Продолжи­тельность  работ, дн |
| -  -  -  А  А,Б  Б  Б  Б,В  Г  Д  Д,Е,Ж  Ж  Ж,З | А  Б  В  Г  Д  Е  Ж  З  И  К  Л  М  Н | 5  7  4  8  12  11  7  5  7  8  4  4  7 |

*Решение*: изображение топологии сетевого графика начинаем с исходного события и работ, выходящих из него. Работы, не имеющие предшествующих работ, должны выходить из исходного события. Это работы А, Б, В. Поставив событие после окончания работы А, вычертим работу Г. Правильное изображение работы Д достигается путем введения фиктивных работ А′, Б′ . Далее изображаются работы Е, Ж, З. Работы И, К, Л, М, Н не являются условиями для выполнения других работ, и поэтому их концы сводятся в одно общее завершающее событие (рис. 14).

1

2

3

5

4

6

111

9

7

8

10

А

Г

Б

В

З

Н

Ж

Е

Д

И

К

Л

М

А′

Б′

5

8

7

7

11

12

8

4

7

4

4

5

7

Рисунок 14

Затем производим кодирование работ топологии сетевого графика.

Для определения коэффициента сложности Ксл подсчитаем число событий n, действительных (Д) и фиктивных (Ф) работ и число ожиданий (О).

n=11, Д=13, Ф=6, О=0

Ксл=(Д+Ф+О)/n Ксл=(13+6+0)/11=1,73

# Параметры сетей и методы их расчета

## Временные параметры сетевых графиков

Сетевая модель имеет ряд характеристик, которые позволяют определить степень напряженности выполнения отдельных работ, а также всего их комплекса и принять решение о перераспределении ресурсов.

Ранний срок наступления события  **tр(i)** - самый ранний из возможных сроков наступления события. Он равен продолжительности максимального пути от исходного события до данного.

**tр(i) = max t[Lр(i)]** (2.1)

Например, tр(7)=19, т.к. L1=(1,2,4,7), L2=(1,3,4,7),

t(L1)=5+12=17 < t(L2)=7+12=19.

Ранний срок начала работы **tр.н.(i,j)** равен продолжительности максимального пути от исходного до начального события данной работы.

**tр.н.(i,j)=max t[Ln(i)]** (2.2)

Например, tр.н.(7,11)=19, т.к. L1=(1,2,4,7), L2=(1,3,4,7),

t(L1)=5+12=17 < t(L2)=7+12=19.

Ранний срок начала работы равен раннему сроку наступления начального события данной работы.

**tр.н.(i,j) = tр(i)** (2.3)

Ранний срок окончания работы **tр.о.(i,j)** равен сумме раннего срока начала работы и продолжительности данной работы.

**tр.о.(i,j)= tр.н.(i,j) + t(i,j)** (2.4)

Например, tр.о.(7,11)= tр.н.(7,11) + t(7,11)= 19+8=27.

Поздний срок наступления события **tп(i)** равен разности между продолжительностью критического пути и продолжительностью максимального пути от данного события до завершающего.

**tп(i) =Tкр - max t[Lк(i)]** (2.5)

Например, tп(7)=19, т.к. L1=(7,11), L2=(7,9,11), t(L1)=8 > t(L2)=4,

tп(7) = Tкр − max t[Lк(7)]=27 − 8=19.

Для событий критического пути **tр(i)=tп(i),** для других событий **tр(i)<tп(i).**

Поздний срок окончания работы **tп.о.(i,j)** – это самый поздний срок окончания работы, при котором планируемый срок окончания проекта не меняется, он равен разности между продолжительностью критического пути и продолжительностью максимального пути от конечного события данной работы до завершающего события.

**tп.о.(i,j)=Tкр − max t[Lк(j)]** (2.6)

Поздний срок окончания работы равен позднему сроку наступления конечного события tп.о.(i,j) = tп(j). Например, tп.о.(4,7) = tп(7)=19.

Поздний срок начала работы **tп.н.(i,j)** – самый поздний срок начала работы, при котором планируемый срок окончания проекта не меняется.

**tп.н.(i,j)= tп.о.(i,j) - t(i,j)** (2.7)

Например, tп.н.(4,7)= tп.о.(4,7) - t(4,7)=19-12=7.

Для работ критического пути ранние и поздние сроки начала и окончания работ равны: tр.н.(4,7)= tп.н.(4,7)=7, tр.о.(4,7)= tп.о.(4,7)=19.

Работы, не лежащие на критическом пути, могут иметь резервы времени.

Полный резерв времени **Rп(i,j)** – максимальное время, на которое можно увеличить продолжительность данной работы, не изменяя продолжительности критического пути.

**Rп(i,j)= tп(j) - tр(i) - t(i,j)**

**Rп(i,j)=** **tп.н(i,j) - tр.н.(i,j)** (2.8)

**Rп(i,j)= tп.о.(i,j) - tр.о.(i,j)**

Свободный резерв времени **Rс(i,j)** равен разности между ранним началом последующей работы и ранним окончанием рассматриваемой работы.

**Rс(i,j)=** **tр.н(j,к) - tр.о.(i,j)** (2.9)

## Матричный метод расчета параметров сетевого графика

Расчет сетевого графика начинается с вычерчивания матрицы. В верхней строке и крайнем левом столбце записываются все события сетевого графика в порядке возрастания их номеров. В клетках **(i,j)** таблицы записываются продолжительности работ сетевого графика **t(i,j)** (табл.2).

Справа присоединяют 2 столбца: **λj** и**i′.** Столбец **λj** заполняют сверху вниз, путем сложения **t(i,j),** расположенного в **j-**мстолбце, с числами **λj,**  вычисленными ранее и расположенными в **i**-й строке. Если в **j**-м столбце находится несколько **t(i,j),** то получается несколько **λj,** и в **i**-ю строку столбца **λj** записывают наибольшую **λj**, а в соседний столбец - номер **i**-й строки, по которой получается максимальное **λj**.

Снизу к таблице присоединяют 3 строки. Строку **j′** заполняют аналогично верхней строке. Вычисление **μj** проводится аналогично вычислению **λj**. Строка **maxλj-μj** получается путем вычитания из **maxλj** величины **μj**. Затем в столбце **λj** и строке **maxλj-μj** по диагонали находим одинаковые числа. Они определяют цифры критических работ, события которых записаны рядом - в столбце **i′** и строке **j′**.

*Пример 2.* Определить на сетевом графике (рис. 14) работы критического пути и его продолжительность матричным методом.

*Решение (табл.2):*

Таблица 2 – Матричный метод расчета сетевого графика

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **i j** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **λj** | **i′** |
| **1** |  | 5 | 7 |  | 4 |  |  |  |  |  |  | 0 | 1 |
| **2** |  |  |  | 0 |  | 8 |  |  |  |  |  | 5 | 1 |
| **3** |  |  |  | 0 | 0 |  |  | 7 | 11 |  |  | 7 | **1** |
| **4** |  |  |  |  |  |  | 12 |  |  |  |  | 7 | **3** |
| **5** |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 5 |  | 7 | 3 |
| **6** |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 7 | 13 | 2 |
| **7** |  |  |  |  |  |  |  |  | 0 |  | 8 | 19 | **4** |
| **8** |  |  |  |  |  |  |  |  | 0 | 0 | 4 | 14 | 3 |
| **9** |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 4 | 19 | 7 |
| **10** |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 7 | 14 | 8 |
| **11** |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 27 | **7** |
| **maxλj-μj** | 0 | 7 | 7 | 7 | 15 | 20 | 19 | 20 | 23 | 20 | 27 |
| **j′** | 1 | 2 | **3** | **4** | 5 | 6 | **7** | 8 | 9 | 10 | **11** |
| **μj** | 27 | 20 | 20 | 20 | 12 | 7 | 8 | 7 | 4 | 7 | 0 |

Критический путь (1,3), (3,4), (4,7), (7,11). Ткр=27 дней.

## Графический метод расчета параметров сетевого графика

Расчеты производятся непосредственно на графике (рис. 15).

1

2

3

4

А

Б

Рисунок 15

1. - номер события; 2 - ранний срок начала работы Б; 3 - поздний срок окончания работы А; 4 - номер предшествующего события, через которое к рассматриваемому идет путь максимальной продолжительности.

Ранний срок начала работы находится по формуле:

**tр.н.(j,к)= max tр.о.(i,j) = max{tр.н.(i,j)+ t(i,j)}**

Поздние окончания предшествующих работ равны минимальному из поздних начал последующих работ, т.е. минимальной разности между поздним окончанием и продолжительностью этих работ.

**tп.о.(i,j)= min tп.н.(j,k) = min{tп.о.(j,k)- t(j,k)}**

*Пример* *3*. Определить временные параметры сети (рисунок 14) методом расчета их на графике.

*Решение (рис.16)*:

5/1

7/0

2/0

0/0

11/37

8/2

6/6

9/9

4/4

0/0

7/7

7

5

4

7

4

11

4

8

12

7

8

5

7

8

20

10 10

14

3

20

8

14

7

23

9

19

7

27

11

27

2

20 200

6

13

4

19

7

19

1

7

2

5

1

7

3

7

3

15

5

7

3

7

4

7

-

0

1

0

М

Л

К

И

Д

Е

Ж

Н

З

В

Г

А

0/0

7/7

Б

6/0

Рисунок 16

Полный и свободный резервы времени вычисляются следующим образом:

Rп(i,j)= tп.о.(i,j)- tр.о.(i,j)= tп.о.(i,j) - (tр.н.(i,j)+ t(i,j))

Rп(3,8)=20-(7+7)=6

Rс(i,j)= tр.н(j,к)- tр.о.(i,j)= tр.н(j,к)- (tр.н.(i,j)+ t(i,j))

Rс(3,9)= tр.н(9,11)- (tр.н.(3,9)+ t(3,9))=19-(7+11)=1

Резервы записываютпод работой в виде дроби: в числителе − полный резерв, в знаменателе − свободный.

## Расчет параметров сетевого графика методом “потенциалов”

**Потенциалом** события называют наибольшую продолжительность пути от рассматриваемого события до завершающего.

Метод удобен при пересчете сетевого графика в процессе контроля за ходом работ.

На сетевом графике рядом с каждым событием наносится Х-образный знак.

В левом секторе записывается ранний срок наступления события **tр(i)** (ранний срок начала последующей работы **tр.н(i,j)**). В нижнем секторе - номер начального события, через которое к данному идет путь с максимальной продолжительностью. В правом секторе записывается потенциал данного события.

**tпот(i)=max (tпот(j)+ t(i,j))**

В верхнем - номер конечного события, через которое проходит путь наибольшей продолжительности от данного события до завершающего.

Расчет начинают с левого и нижнего секторов. Затем путем обратного счета определяется потенциал и номера соответствующих событий. Полные и свободные резервы времени записываются под работами в виде дроби: в числителе - полный резерв, в знаменателе − свободный.

*Пример* *4*. Определить временные параметры сетевого графика на рисунке 14 методом “потенциалов”.

Рассмотрим решение на рис. 17.

1

2

3

5

4

6

111

9

7

8

10

А

Г

Б

В

З

Н

Ж

Е

Д

И

К

Л

М

А′

Б′

5

8

7

7

11

12

8

4

7

4

4

5

7

0

3

27

-

5

4

20

1

13

11

7

2

7

7

20

3

7

4

20

1

7

10

12

3

19

11

8

4

19

11

4

7

14

10

7

3

14

11

7

8

27

-

0

7

2/0

0/0

1/3

0/0

7/0

5/1

6/0

8/2

7/7

0/0

4/4

9/9

6/60

*Решение*:

Рисунок 17

Полные резервы:

**Rп(i,j)=tп.н.(i,j)−tр.н.(i,j)=Ткр−tпот(i)−tр.н.(i,j)=Ткр−(tпот(i)+tр.н.(i,j))=**

**=Ткр−( tпот(j)+** **t(i,j)+tр.н.(i,j))**

Rп(3,9)=27- (4+11+7)=5

Свободный резерв:

**Rс(i,j)=tр.н(j,к) − tр.о.(i,j)=tр.н.(j,к) − (tр.н.(i,j) + t(i,j))=**

**=tр(j) − (tр.н.(i,j)+ t(i,j))**

Rс(3,9)= tр(9)- (tр.н.(3,9)+ t(3,9))= 19-(7 + 11)=1

## Табличный метод расчета параметров сетевого графика

*Пример* *5*. Определить временные параметры сетевого графика на рисунке 14, пользуясь табличным методом.

*Решение*: все вычисления будем заносить в таблицу 3.

Перечень работ и их продолжительность перенесем во вторую и третью графы. При этом работы следует записывать в графу 2 последовательно: сначала начиная с номера 1, затем с номера 2 и т.д.

В первой графе поставим число, характеризующее количество непосредственно предшествующих работ (КПР) тому событию, с которого начинается рассматриваемая работа. Так, для работы (5,10) в графу 1 поставим число 2, т.к. на номер 5 оканчиваются 2 работы: (1,5) и (3,5).

Таблица 3 – Табличный метод расчета сетевого графика

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **КПР** | **Код**  **Работы** | **Продолжительность работы** | **Ранние**  **сроки** | | **Поздние**  **сроки** | | **Резервы**  **времени** | |
|  | **(i,j)** | **t(i,j)** | **tрн(i,j)** | **tро(i,j)** | **tпн(i,j)** | **tпо(i,j)** | **Rп** | **Rс** |
| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5=3+4 | 6=7-3 | 7 | 8 | 9 |
| 0 | (1,2) | 5 | 0 | 5 | 2 | 7 | 2 | 0 |
| 0 | (1,3) | 7 | 0 | 7 | 0 | 7 | 0 | 0 |
| 0 | (1,5) | 4 | 0 | 4 | 11 | 15 | 11 | 3 |
| 1 | (2,4) | 0 | 5 | 5 | 7 | 7 | 2 | 2 |
| 1 | (2,6) | 8 | 5 | 13 | 12 | 20 | 7 | 0 |
| 1 | (3,4) | 0 | 7 | 7 | 7 | 7 | 0 | 0 |
| 1 | (3,5) | 0 | 7 | 7 | 15 | 15 | 8 | 0 |
| 1 | (3,8) | 7 | 7 | 14 | 13 | 20 | 6 | 0 |
| 1 | (3,9) | 11 | 7 | 18 | 12 | 23 | 5 | 1 |
| 2 | (4,7) | 12 | 7 | 19 | 7 | 19 | 0 | 0 |
| 2 | (5,10) | 5 | 7 | 12 | 15 | 20 | 8 | 2 |
| 1 | (6,11) | 7 | 13 | 20 | 20 | 27 | 7 | 7 |
| 1 | (7,9) | 0 | 19 | 19 | 23 | 23 | 4 | 0 |
| Продолжение таблицы 3 | | | | | | | | |
| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** |
| 1 | (7,11) | 8 | 19 | 27 | 19 | 27 | 0 | 0 |
| 1 | (8,9) | 0 | 14 | 14 | 23 | 23 | 9 | 5 |
| 1 | (8,10) | 0 | 14 | 14 | 20 | 20 | 6 | 0 |
| 1 | (8,11) | 4 | 14 | 18 | 23 | 27 | 9 | 9 |
| 3 | (9,11) | 4 | 19 | 23 | 23 | 27 | 4 | 4 |
| 2 | (10,11) | 7 | 14 | 21 | 20 | 27 | 6 | 6 |

Далее заполняем графы 4 и 5. Для работ, имеющих цифру 0 в графе 1, в графу 4 также заносятся нули, а их значения в графе 5 получаются в результате суммирования граф 3 и 4 (по формуле (2.4)). В нашем случае для работ (1,2), (1,3), (1,5) в графе 4 ставим 0, а в графе 5 − 0+5=5, 0+7=7, 0+4=4. Для заполнения следующих строк графы 4 , т.е. строк начиная с номера 2, просматриваются заполненные строки графы 5, содержащие работы, которые оканчиваются на этот номер, и максимальное значение переносится в графу 4 обрабатываемых строк. В данном случае такая работа одна − (1,2). Цифру 5 из графы 5 переносим в графу 4 для всех работ, начиная с номера 2, т.е. в две последующие строки с номерами (2,4) и (2,6). Для каждой из этих работ путем суммирования значений граф 3 и 4 сформируем значение графы 5: tр.о.(2,4)=0+5=5, tр.о.(2,6)=8+5=13. Этот процесс повторяется до тех пор, пока не будет заполнена последняя строка таблицы.

Графы 6 и 7 заполняются “обратным ходом”, т.е. “снизу вверх”. Для этого просматриваются строки, оканчивающиеся на номер последнего события, и из графы 5 выбирается максимальная величина, которая записывается в графу 7 по всем строчкам, оканчивающимся на номер последнего события (т.к. **tр(i)= tп(i)**). В нашем случае **t(11)=27**.Затем для этих строчек находится содержание графы 6 как разности граф 7 и 3 по формуле (2.7). Далее просматриваются строки, оканчивающиеся на номер предпоследнего события, т.е. 10. Для определения графы 7 этих строк (работы (8,10) и (5,10)) просматриваются все строчки, начинающиеся с номера 10. В графу 6 среди них выбирается минимальная величина, которая переносится в графу 7 по обрабатываемым строчкам. В нашем случае она одна − (10,11), поэтому заносим в строчки (8,10) и (5,10) графы 7 цифру 20. Процесс повторяется до тех пор, пока не будут заполнены все строчки по графам 6 и 7.

Содержимое графы 8 равно разности граф 6 и 4 или граф 7 и 5 (формула (2.8).

Содержимое графы 9 вычисляется по формуле (2.9):

Rс(3,9)= tр.н(9,11)- tр.о.(3,9)=19-18=1.

Учитывая, что резерв времени имеют только события и работы, которые принадлежат критическому пути, получаем критический путь (1,3,4,7,11).

## Сетевое планирование в условиях неопределенности

Продолжительность выполнения работ часто трудно задать точно, и поэтому вместо одного числа (детерминированная оценка) задаются две оценки − минимальная и максимальная. Минимальная (оптимистическая) оценка **tmin(i,j)** характеризует продолжительность выполнения работы при наиболее благоприятных обстоятельствах, а максимальная (пессимистическая) **tmax(i,j) −** при наиболее неблагоприятных. Продолжительность работы в этом случае рассматривается как случайная величина, которая в результате реализации может принять любое значение в заданном интервале. Такие оценки называются вероятностными (случайными), и их ожидаемое значение **tож(i,j)** оценивается по формуле

**tож(i,j)=(3 tmin(i,j)+2 tmax(i,j))/5** (2.10)

Для характеристики степени разброса возможных значений вокруг ожидаемого уровня используется показатель дисперсии:

**S2(i,j)=0,04(tmax(i,j)- tmin(i,j))2** (2.11)

На основе этих оценок можно рассчитать все характеристики сетевой модели, однако они будут иметь иную природу, т.е. выступать как средние характеристики. При достаточно большом количестве работ можно утверждать (а при малом - лишь предполагать), что общая продолжительность любого, в том числе и критического, пути имеет нормальный закон распределения со средним значением, равным сумме средних значений продолжительности составляющих его работ, и дисперсией, равной сумме дисперсий этих же работ.

Кроме обычных характеристик, при вероятностном задании продолжительности работ можно решить две дополнительные задачи:

1. определить вероятность того, что продолжительность критического пути **tкр**не превысит заданного директивного уровня **Т**;
2. определить максимальный срок выполнения всего комплекса работ **Т** при заданном уровне вероятности **р**.

Первая задача решается на основе интеграла вероятности Лапласа Φ(Z) путем использования формулы:

**p(tкр<T)=0,5+0,5Φ(Z),** где **Z=(T-tкр)/Sкр**, (2.12)

где Z - нормированное отклонение случайной величины;

Sкр - среднее квадратическое отклонение, вычисляемое как корень квадратный из дисперсии продолжительности критического пути. Соответствие между Z и симметричным интервалом вероятности приведено в таблице 4.

Таблица 4 - Таблица стандартного нормального распределения

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Z** | **Φ(Z)** | **Z** | **Φ(Z)** | **Z** | **Φ(Z)** |
| **0** | 0.0000 | 1.0 | 0.6827 | 2.0 | 0.9643 |
| **0.1** | 0.0797 | 1.1 | 0.7287 | 2.1 | 0.9722 |
| **0.2** | 0.1585 | 1.2 | 0.7699 | 2.2 | 0.9786 |
| **0.3** | 0.2358 | 1.3 | 0.8064 | 2.3 | 0.9836 |
| **0.4** | 0.3108 | 1.4 | 0.8385 | 2.4 | 0.9876 |
| **0.5** | 0.3829 | 1.5 | 0.8664 | 2.5 | 0.9907 |
| **0.6** | 0.4515 | 1.6 | 0.8904 | 2.6 | 0.9931 |
| **0.7** | 0.5161 | 1.7 | 0.9104 | 2.7 | 0.9949 |
| **0.8** | 0.5763 | 1.8 | 0.9281 | 2.8 | 0.9963 |
| **0.9** | 0.6319 | 1.9 | 0.9545 | 2.9 | 0.9973 |

При достаточно большой полученной величине вероятности (более 0.8) можно с высокой степенью уверенности предполагать своевременность выполнения всего комплекса работ.

Для решения второй задачи используется формула

**T=tож(Lкр)+Z\*Sкр.** (2.13)

*Пример* 6. Структура сетевой модели и оценки продолжительности работ (в сутках) заданы в таблице 5. Требуется:

1. оценить вероятность выполнения всего комплекса работ за 35 дней, за 30 дней;
2. оценить максимально возможный срок выполнения всего комплекса работ с надежностью 95%.

Таблица 5 – Сетевая модель

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Работа | Продолжительность | | Ожидаемая  продолжит. | Дисперсия |
| **(i,j)** | **tmin(i,j)** | **tmax(i,j)** | **tож(i,j)** | **S2(i,j)** |
| (1,2) | 5 | 7,5 | 6 | 0,25 |
| (2,3) | 4 | 6,5 | 5 | 0,25 |
| (2,4) | 1 | 6 | 3 | 1,00 |
| (2,5) | 3 | 5,5 | 4 | 0,25 |
| (3,7) | 1 | 3,5 | 2 | 0,25 |
| (4,5) | 5 | 7,5 | 6 | 0,25 |
| (4,6) | 3 | 5,5 | 4 | 0,25 |
| (4,9) | 5 | 10 | 7 | 1,00 |
| (5,8) | 2 | 4,5 | 3 | 0,25 |
| (5,10) | 7 | 12 | 9 | 1,00 |
| (6,9) | 0 | 0 | 0 | 0 |
| (6,11) | 3 | 8 | 5 | 1,00 |
| (7,10) | 1 | 3,5 | 2 | 0,25 |
| (8,10) | 2 | 7 | 4 | 1,00 |
| (9,10) | 1 | 6 | 3 | 1,00 |
| (10,11) | 8 | 10,5 | 9 | 0,25 |

Три первые графы таблицы содержат исходные данные, а две последние - результаты расчетов по формулам. Так, например, tож(1,2)=(3\*5+2\*7,5)/5=6, tож(2,3)=(3\*4+2\*6,5)/5=5, S2(1,2)=0,04(7,5-5)2=0,25, S2(2,3)=0,04(6,5- 4)2=0,25.

Используя любой из приведенных выше методов, можно найти все характеристики сетевой модели.

Критическим является путь (1,2,4,5,10,11), а его продолжительность

tож = 33 дня.

Дисперсия критического пути составляет:

S2(Lкр)=S2(1,2)+S2(2,4)+S2(4,5)+S2(5,10)+S2(10,11)= =0,25+1,00+0,25+1,00+0,25=2,75.

Для использования формулы (2.12) необходимо иметь среднее квадратичное отклонение, вычисляемое путем извлечения из значения дисперсии квадратного корня, т.е. S(Lкр)=1,658.

Тогда имеем:

p(tкр<35)=0,5+0,5Φ((35-33)/1,66)=0,5+0,5Φ(1,2)=0,5+0,5\*0,7699=0,90,

p(tкр<30)=0,5+0,5Φ((30-33)/1,66)=0,5-0,5Φ(1,8)=0,5-0,5\*0,9281=0,035.

Вероятность того, что весь комплекс работ будет выполнен не более чем за 35 дней, составляет примерно 90,4%, в то время как вероятность его выполнения за 30 дней - всего 3,5%.

Для решения второй (по существу обратной) задачи прежде всего найдем значение аргумента Z, которое соответствует заданной вероятности 95%. В графе Φ(Z) наиболее близкое значение (0,9545\*100%) соответствует Z=1,9.

Тогда по формуле (2.13) T=tож(Lкр)+Z\*Sкр = 33+19\*1,658=36 дн.

Следовательно, максимальный срок выполнения всего комплекса работ при заданном уровне вероятности 95% составляет всего 36 дней.

# 3 анализ и оптимизация сетевой модели

**3.1 Предварительный анализ сетевой модели**

Анализ сетевой модели предусматривает пересмотр топологии сети, который заключается не только в контроле правильности построения графика, но и в установлении необходимости детализации работ и структуры сети.

Вторым этапом анализа является классификация и группирование работ по величинам резервов. Определить степень трудности выполнения в срок каждой группы работ можно с помощью коэффициента напряженности работ, который вычисляется по формуле:

**kн(i,j)=1-Rп(i,j)/[tкр - t′кр],**

где **Rп(i,j)** - полный резерв времени;

**tкр** - продолжительность критического пути,

**t′кр**- продолжительность отрезка рассматриваемого пути, совпадающая с критическим.

Коэффициент напряженности изменяется от нуля до единицы, причем чем он ближе к единице, тем сложнее выполнить данную работу в установленный срок. На основе этого коэффициента все работы сетевой модели могут быть разделены на три группы:

1. напряженные (**kн(i,j)>0.8**);
2. подкритические (**0,6< kн(i,j)<0,8**);
3. резервные (**kн(i,j)<0,6**).

В результате перераспределения ресурсов стараются максимально уменьшить общую продолжительность работ, что возможно при переводе всех работ в первую группу. При расчете этих показателей целесообразно пользоваться графиком сетевой модели. Например, для сетевой модели на рис.14 для работ критического пути kн(1,3)= kн(3,4)= kн(4,7)= kн(7,11)=1,

kн(1,2)=1-(2: (27-(12+8))= 0,71,

kн(3,8)=1-(6: (27-7)=0,7.

Подготовленный сетевой график подлежит оптимизации, т.е. приведению параметров сетевого графика к заданным ограничениям.

**3.2 Оптимизация сетевого графика по времени**

Оптимизация по времени требуется в том случае, если продолжительность работ по графику окажется больше директивной.

Методы оптимизации:

* сокращение продолжительности критического пути;
* расчленение критических работ и их запараллеливание;
* изменение топологии сети за счет изменения технологии.

*Пример 7*. В сетевом графике на рисунке 18 необходимо сократить продолжитель­ность критического пути с 24 до 20 дней.

2

6

6

(50)

5

10

1

2

5

6

3

4

8

7

(10)

2

6

6

(40)

6

10

1

2

5

6

3

4

4

7

(20)

а - до оптимизации б - после оптимизации

Рисунок 18

*Решение*: сокращение критического пути достигается за счет перераспределения ресурсов с некритических работ на критические. На сетевом графике в скобках показана численность рабочих. Сокращаем продолжительность работы (3,4) на 4 дня, добавляя на эту работу 10 человек с работы (2,4).

### 3.3 Оптимизация сетевого графика по трудовым ресурсам

*Пример* *8*. Провести перепланирование трудовых ресурсов, имея в виду, что численность персонала ежедневно должна составлять 70 чел. (рис. 19).

0

1

2

3

4

5

0

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

120

0

70

80

60

6

(20)

(50)

(10)

(40)

(40)

(20)

(30)

(50)

(5)

(45)

70

90

90

50

90

50

50

95

45

(20)

Рисунок 19

*Решение*: чтобы уменьшить численность работающих в 3-й день и увеличить число занятых на 4-й день, увеличиваем продолжительность работы (1,2) в 2 раза за счет резерва времени и уменьшаем в 2 раза численность работающих. Аналогично поступаем для работ (2,5) и (5,6) (рис.20).

0

1

2

3

4

5

0

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

120

0

70

70

70

6

(20)

(50)

(10)

(40)

(20)

(20)

(30)

(25)

(5)

(45)

70

70

70

70

70

70

70

70

70

(10)

Рисунок 20

**3.4 Оптимизация сетевого графика по материальным ресурсам**

Оптимизация осуществляется по каждому виду ресурса отдельно.

*Пример* 9. Оптимизировать сетевой график по времени, предполагая, что на строительную площадку ежедневно может поступать не более 50 м3 бетона (рис.21).

0

1

2

3

4

0

1

2

3

4

5

0

70

60

20

(30)

(20)

(30)

(40)

(40)

(10)

90

10

(60)

(20)

Рисунок 21

*Решение*: представим сетевой график таблично (табл. 6).

Таблица 6 – Сетевой график

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Код  рабо-  ты | Параметры  графика до  оптимизации | | Потребность в бетоне | Рабочее время графика | | | | |
| (i,j) | t(i,j) | Rc |  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 0,1  0,2  1,2  1,3  2,3  2,4  3,4 | 1  1  1  1  2  1  1 | 0  1  0  2  0  2  0 | 30  40  30  60  40  40  10 | 30/20  20/0 | 20/30  30/0 | 30/20  20/0 | 30/20  20/0 | 40/10  10/0 |
| Возможный объем поставки | | | | 50 | 50 | 50 | 50 | 50 |

Таблица заполняется по каждой работе дробными числами, у которых числитель показывает еженедельный расход бетона на протяжении всего времени выполнения данной работы, знаменатель - оставшуюся после использования по данной работе часть от объема возможной поставки бетона. Полученный остаток направляется для использования на следующей работе, где в числителе опять записывается потребность, а в знаменателе новый остаток, и так до полного использования объема поставок.

Из таблицы видно, что бетон в первую очередь необходимо поставлять для работ (0,1), (1,2), (2,3), (3,4) и поставка должна быть в срок, т.к. работы критические.

Работу (0,2) не можем закончить за 1 день, т.к. свободный остаток − 20 м3. Поэтому, используя резерв времени, мы увеличиваем ее продолжительность до 2 дней, распределяя потребность в бетоне 40 м3 на 2 дня, по 20 м3 ежедневно.

Работа (1,3) не может начаться сразу после работы (0,1), т.к. бетон распределен между работами (1,2) и (0,2). Работа (1,3) не может быть произведена за 1-ю неделю, т.к. в третьей неделе из 50 м3 поставляемого бетона необходимо выделить 20 м3 на критическую работу (2,3). Следовательно, помимо сдвижки работы (1,3) на 1 день, необходимо увеличить ее продолжительность до 2 дней, равномерно распределив потребность в бетоне (60 м3) на 2 дня.

Работа (2,4) не может выполняться в 3-ю и 4-ю недели, т.к. общее количество поставляемого бетона уже распределено. Поэтому срок ее выполнения – 5-я неделя.

Процесс оптимизации можно выполнить на сетевом графике (рис. 22).

5

4

3

2

1

0

(30)

(10)

3

1

(30)

(30)

(20)

(40)

(20)

4

0

2

50

50

50

50

50

0

Рисунок 22

Следует иметь в виду, что когда резервы полностью использованы на всех работах, а потребность в ресурсах в единицу времени превышает их поступление, возникает необходимость либо изменить технологию работ, либо увеличить общую продолжительность критического пути.

**3.5 Оптимизация сетевого графика по денежным ресурсам**

Оптимизация сетевого графика по денежным ресурсам осуществляется аналогично оптимизации по материальным ресурсам. Например, если данные по бетону заменять на данные по рублям, ограничения – еженедельный плановый объем работ в тыс. руб.

# 4 управление производством работ по сетевым графикам

Для успешного осуществления производства работ по сетевому графику необходима четкая координация деятельности всех участников на основе контроля и анализа выполнения работ сетевой модели.

Процесс управления по сетевому графику можно разделить на следующие периодически повторяющиеся этапы:

1. Сбор, подготовка и передача ответственными исполнителями в группу СПУ очередной информации о ходе работ.

Отчет включает продолжительность выполнения работ за отчетный период, оставшийся объем работ в %, планируемые продолжительности выполнения оставшегося объема работ и причины отклонения от плана.

1. Обработка полученной информации и подготовка ее для расчета параметров сетевого графика.

Группа СПУ отображает информацию на сетевом графике.

1. Расчет параметров сетевого графика.

Целью расчета является получение:

* перечня работ или событий критических путей,
* продолжительности критического пути,
* ранних и поздних начал и окончаний всех работ,
* полных и свободных резервов времени.

1. Анализ результатов расчета и подготовка рекомендаций по дальнейшему ведению работ.
2. Проведение оперативного совещания.

Представитель группы СПУ докладывает о результатах анализа параметров сетевого графика и сообщает о разработанных рекомендациях по дальнейшему ведению работ.

1. Разработка и выдача план-задания.

*Пример* *10*. Пользуясь отчетом о ходе работ (табл. 7) по сетевому графику, изображенному на рисунке 14, требуется:

1. Нанести на сетевой график линию хода работ.
2. Подсчитать новую продолжительность критического пути, полные и свободные резервы времени.
3. Выдать план-задание.

Таблица 7. – Отчет о ходе работ

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Отчет о ходе работ (заполняется ответственным исполнителем) | | | | |
| Код  работ | Фактическая продолжительность  за отчетный период | Оставшийся объем работ в % | Продолжительность  выполнения оставшегося объема  работ | Причины  отклонения  от плана |
| 1,2 | 2 | 60 | 3 | Задержив. |
| 1,3 | 5 | 29 | 2 | поставка |
| 1,5 | 2 | 50 | 2 | материалов |

Получив информацию о ходе работ, инженеры группы СПУ отмечают на сетевом графике выполнение работ за данный отчетный период. Например, оставшийся объем работы (1,2) - 60%. Стрелка, изображающая работу (1,2), делится на две части в соответствии с этим процентом. Левая часть, равная 40% длины стрелки, изображает выполненную часть работы, а правая, равная 60%, − оставшуюся часть работы. Под правой частью ставят обычно новую, оставшуюся продолжительность работы, причем, старая продолжительность зачеркивается. Аналогично изображают объемы выполненных работ и по другим работам сетевого графика. Затем все точки, делящие объемы, соединяют «линией хода работ» (рис. 23).

1

2

3

5

4

6

111

9

7

8

10

А

Г

Б

В

З

Н

Ж

Е

Д

И

К

Л

М

А′

Б′

3

8

7

2

11

12

8

4

7

4

2

5

7

Рисунок 23

После этого сетевой график рассчитывается с учетом новых продолжительностей работ (табл. 8). В результате такого расчета меняются временные параметры сетевого графика, может измениться критический путь и его продолжительность.

Таблица 8 – Расчет сетевого графика

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **КПР** | **Код**  **работы** | **Продолжи­тельность работы** | **Ранние**  **сроки** | | **Поздние**  **сроки** | | **Резервы**  **времени** | |
|  | **(i,j)** | **t(i,j)** | **tрн(i,j)** | **tро(i,j)** | **tпн(i,j)** | **tпо(i,j)** | **Rп** | **Rс** |
| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5=3+4 | 6=7-3 | 7 | 8 | 9 |
| 0 | (1,2) | 3 | 0 | 3 | 0 | 3 | 0 | 0 |
| 0 | (1,3) | 2 | 0 | 2 | 1 | 3 | 1 | 0 |
| 0 | (1,5) | 2 | 0 | 2 | 9 | 11 | 9 | 0 |
| 1 | (2,4) | 0 | 3 | 3 | 3 | 3 | 0 | 0 |
| 1 | (2,6) | 8 | 3 | 11 | 8 | 11 | 5 | 0 |
| 1 | (3,4) | 0 | 2 | 2 | 3 | 16 | 1 | 1 |
| 1 | (3,5) | 0 | 2 | 2 | 11 | 19 | 9 | 0 |
| 1 | (3,8) | 7 | 2 | 9 | 9 | 15 | 7 | 0 |
| 1 | (3,9) | 11 | 2 | 13 | 8 | 16 | 6 | 2 |
| 2 | (4,7) | 12 | 3 | 15 | 3 | 23 | 0 | 0 |
| 2 | (5,10) | 5 | 2 | 7 | 11 | 19 | 9 | 2 |
| 1 | (6,11) | 7 | 11 | 18 | 16 | 23 | 5 | 5 |
| 1 | (7,9) | 0 | 15 | 15 | 19 | 19 | 4 | 0 |
| 1 | (7,11) | 8 | 15 | 23 | 15 | 16 | 0 | 0 |
| 1 | (8,9) | 0 | 9 | 9 | 19 | 23 | 10 | 6 |
| 1 | (8,10) | 0 | 9 | 9 | 16 | 23 | 7 | 0 |
| 1 | (8,11) | 4 | 9 | 13 | 19 | 23 | 10 | 10 |
| 3 | (9,11) | 4 | 15 | 19 | 19 | 23 | 4 | 4 |
| 2 | (10,11) | 7 | 9 | 16 | 16 | 23 | 7 | 7 |

Продолжительность критического пути стала 23 дня.

Он стал проходить по работам (1,2), (2,4), (4,7), (7,11).

После оперативного совещания готовится план-задание (табл.9).

Таблица 9 – План-задание

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| План-задание (заполняется в группе СПУ) | | | | |
| Код | Наименование | Планируемая  продолжи- | Дата | |
| работ | работ | тельность  работ | начала работ | окончания работ |
| 1,2 | А | 3 | 22.03.07 | 25.03.07 |
| 1,3 | Б | 2 | 22.03.07 | 24.03.07 |
| 1,5 | В | 2 | 22.03.07 | 24.03.07 |
| 2,6 | Г | 8 | 25.03.07 | 02.04.07 |
| 4,7 | Д | 12 | 25.03.07 | 06.04.07 |
| 3,9 | Е | 11 | 24.03.07 | 04.04.07 |
| 3,8 | Ж | 7 | 24.03.07 | 31.03.07 |
| 5,10 | З | 5 | 24.03.07 | 29.03.07 |
| 7,11 | К | 8 | 06.04.07 | 14.04.07 |